ECON 2200, Lineær approximasjon og differensialer - Handout

Kjell Arne Brekke

February 28, 2011

1 Lineær approximasjon

La $y = f(x)$, da kan vi skrive

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Fra definisjonen av derivasjon vet vi at

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

eller med andre ord

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x$$

Setter vi inn fra definisjonen av Δy kan vi skrive dette på en annen måte

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) - f(x) &\approx f'(x)\Delta x \\ f(x + \Delta x) &\approx f(x) + f'(x)\Delta x \end{aligned}$$

Denne ligningen blir utgangspunktet for en lineær approximasjon. La oss nå velge oss en bestemt x-verdi x_0, og si vi kjenner $f(x_0)$ og $f'(x_0)$. Hva kan vi da si om $f(x)$ for en vilkårlig annen verdi av x? Merk da at vi kan la

$$\Delta x = x - x_0$$

da er jo

$$x = x_0 + \Delta x$$

og

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &= (f(x_0) - x_0 f'(x_0)) + f'(x_0)x \end{aligned}$$

Eksempel: Vi ønsker en lineær approximasjon til $f(x) = x^2$ rundt punktet $x_0 = 1$

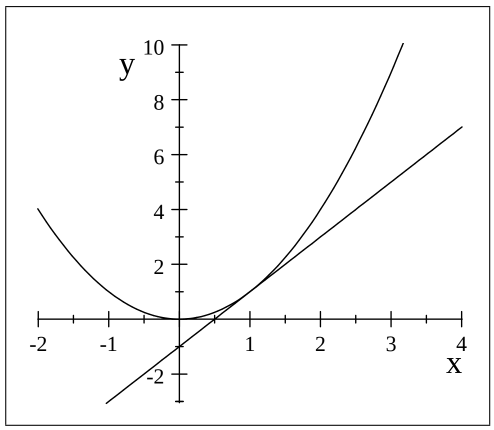
$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &= x_0^2 + 2x_0(x - x_0) \\ &= 1 + 2(x - 1) = 2x - 1 \end{aligned}$$

altså er

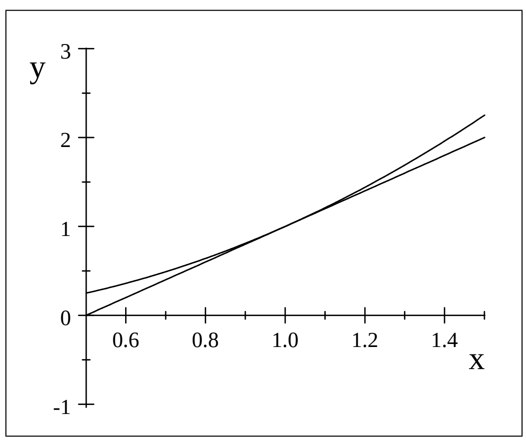
$$x^2 \approx 2x - 1 \text{ for } x \approx 1$$

og siden høyresiden, $2x - 1$, er en lineær funksjon, kaller vi dette en lineær approximasjon.

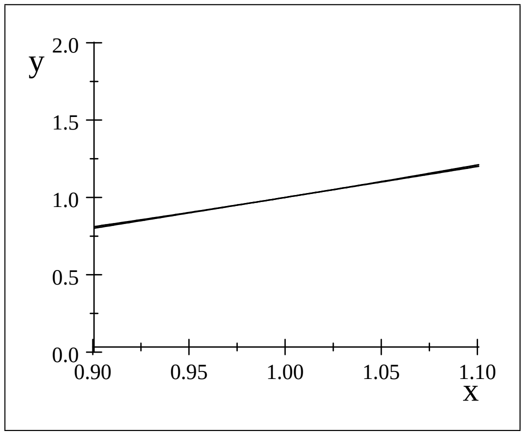
I figuren nedenfor har vi tegnet f og approximasjonen i området $-2 < x < 4$ og vi ser at approximasjonen er dårlig, særlig for $x > 2$ og $x < 0$.



I intervallet $0,5 < x < 1,5$ derimot ble bildet et helt annet,



og for $0,9 < x < 1,1$, kan vi nesten ikke skille kruvene med den gitte grafiske oppløsningen



I et lite område rundt $x = 1$ er $2x - 1$ altså en svært god tilnerming til x^2.

Oppgave 1 *Lag en lineær approximasjon til* $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ *rundt punktet* $x_0 = 1$

Differensialer
Det faktiske endringen i funksjonverdien kaller vi

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x)$$

mens tilnermingen kalles differensialet

$$dy = f'(x)dx$$

Ofte skriver vi det som

$$df = f'(x)dx$$

Sjekk regnereglene for differensialer i læreboka.

2 Lineær approximasjon for med funksjoner av flere variable:

Med flere variabler kan vi gjøre tilsvarende. La $z = f(x, y)$. Vi skal vise på forelesning at vi kan skrive

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) \\ &\approx f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y \end{aligned}$$

Ved å la $x - x_0 = \Delta x$ og $y - y_0 = \Delta y$ gir det den lineære approximasjonen:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

For $x_0 = 1, y_0 = 2$ og $f(x, y) = xy$ får vi da

$$\begin{aligned} xy &\approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &= 2 + 2(x - 1) + 1(y - 2) = 2x + y - 2 \end{aligned}$$

Oppgave 2 *Lag en lineær approximasjon til* $f(x, y) = 3 + xy + x^2$ *rundt punktet* $x_0 = 2, y_0 = 1$

Implisitt derivasjon med lineær approximasjon

Om vi nå ser på funksjonen $z = f(x, y)$. Nivåkurvene til funksjonen, $f(x, y) = z_0$, definerer y som en funksjon av x

$$f(x, y(x)) = z_0$$

og ved implisitt derivasjon ønsker vi å finne $y'(x)$. Nå vet vi at

$$\Delta z \approx f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

Når vi deriverer y med hensyn på x der y er gitt som en nivåkurve så er vi ute etter hvor mye må vi endre y (altså hvor stor skal Δy være) om vi gjør en liten økning i x, Δx og samtidig ønsker at z skal være uforandret $\Delta z = 0$. Om vi bruker approximasjonen får vi

$$0 = \Delta z \approx f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

dvs

$$f'_y(x_0, y_0)\Delta y \approx -f'_x(x_0, y_0)\Delta x$$

som vi kan skrive som

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}$$

eller

$$y'(x_0) = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}$$

Oppgave 3 *Vi regnet ovenfor på en lineær approximasjon til* $f(x, y) = xy$ *rundt punktet* $x_0 = 1, y_0 = 2$*. Merk at* $f(x_0, y_0) = 2$*. Bruk den lineære approximasjonen vi fant til å finne et uttrykk for*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

i dette punktet, gitt at vi er på nivåkurven $f(x, y) = 2$*. (Altså at* $\Delta z = 0$*).*